EDUTECH

RÉVISION — CONCOURS DE L'ENSEIGNEMENT (PRIMAIRE)

Nombres et calcul

Les ensembles de nombres et les opérations arithmétiques • Mathématiques — Spécialité • Leçon 1

Domaine « Nombres et calcul » : 7 % de l'épreuve de spécialité (sessions 2023–2025) — 6 % en 2022 • Le domaine couvre les leçons 1, 2 et 3 (nombres, proportionnalité, équations) • Source : descriptif officiel du concours

Objectifs de la leçon

- Connaître les ensembles de nombres $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ **et** $\mathbb{R}$, leurs inclusions et savoir classer un nombre.
- Maîtriser les opérations arithmétiques et la **division euclidienne** (quotient et reste).
- Savoir **décomposer** un entier en produit de facteurs premiers et en déduire le **PGCD** et le **PPCM**.
- Comparer des nombres entiers, décimaux et rationnels en appliquant les règles de l'ordre.
- Appliquer les règles de calcul sur les **puissances** et utiliser la notation scientifique.
- Utiliser les **identités remarquables** pour développer, factoriser et calculer mentalement.
- Effectuer des calculs avec les **nombres sexagésimaux** (durées et angles).

Plan de la leçon

1. Les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$

2. Les opérations arithmétiques et la division euclidienne

3. La décomposition en produit de facteurs premiers

4. Le PGCD et le PPCM

5. La comparaison des nombres

6. Les puissances

7. Les identités remarquables

8. Les nombres sexagésimaux

9. Exercices d'entraînement (type concours) avec solutions détaillées

10. À retenir

1. Les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$

1.1 Définitions

Définition — L'ensemble $\mathbb{N}$ des **entiers naturels** est formé des nombres 0, 1, 2, 3, … : $\mathbb{N} = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; \ldots\}$. On note $\mathbb{N}^*$ l'ensemble $\mathbb{N}$ privé de 0.

Définition — L'ensemble $\mathbb{Z}$ des **entiers relatifs** est formé des entiers naturels et de leurs opposés : $\mathbb{Z} = \{\ldots ; -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; \ldots\}$.

Définition — L'ensemble $\mathbb{Q}$ des **nombres rationnels** est formé des nombres qui peuvent s'écrire sous la forme a/b, où $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$: $\mathbb{Q} = \{a/b \ ; \ a \in \mathbb{Z}, \ b \in \mathbb{Z}\}$. Exemples : 3/4 ; −5 ; 2,5 (= 5/2) ; 0,333… (= 1/3).

Définition — L'ensemble $\mathbb{R}$ des **nombres réels** est formé de tous les rationnels et des nombres irrationnels, c'est-à-dire des nombres qui ne peuvent pas s'écrire sous la forme a/b : $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π, …

On retient les inclusions suivantes, fondamentales pour classer un nombre :

À retenir — $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$: tout entier naturel est un entier relatif, tout entier relatif est un rationnel, tout rationnel est un réel. L'inverse est faux : un réel n'est pas toujours un rationnel.

Les **nombres décimaux** (notés $\mathbb{D}$) sont les rationnels qui s'écrivent avec un nombre fini de chiffres après la virgule : 2,5 ; −0,75 ; 3,14… Ils forment un sous-ensemble de $\mathbb{Q}$: $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$. En revanche, 1/3 = 0,333… n'est pas décimal, car son écriture décimale est illimitée.

1.2 Comment reconnaître la nature d'un nombre ?

- Un nombre **entier** (positif ou nul) appartient à $\mathbb{N}$. Exemple : 0 ; 7 ; 125.
- Un nombre **entier négatif** appartient à $\mathbb{Z}$ mais pas à $\mathbb{N}$. Exemple : −4 ; −18.
- Un nombre **décimal** (nombre fini de chiffres après la virgule) appartient à $\mathbb{Q}$. Exemple : 0,25 = 1/4.
- Une **fraction** a/b ($b \neq 0$) appartient toujours à $\mathbb{Q}$. Exemple : 7/3 ; −11/2.
- Une **racine carrée d'un entier qui n'est pas un carré parfait** est irrationnelle : $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$.
- Le nombre **π** (3,14159…) est irrationnel : $\pi \notin \mathbb{Q}$.

Erreur à éviter — Ne pas confondre « décimal » et « rationnel » : tout nombre décimal est rationnel, mais un rationnel n'est pas toujours décimal (1/3 = 0,333… est rationnel et non décimal). De même, $\sqrt{9} = 3$ appartient à $\mathbb{N}$: c'est la valeur du nombre qui compte, pas son écriture.

Exemple résolu — Classer les nombres suivants : −3 ; 0 ; 2,5 ; 7/3 ; $\sqrt{9}$; $\sqrt{2}$; π ; −0,75. $-3 \in \mathbb{Z}$ (entier négatif) mais $-3 \notin \mathbb{N}$. $0 \in \mathbb{N}$ (donc aussi $\in \mathbb{Z}$, $\in \mathbb{Q}$, $\in \mathbb{R}$). 2,5 = 5/2 : c'est un décimal, donc $2{,}5 \in \mathbb{Q}$ et $2{,}5 \in \mathbb{R}$. $7/3 \in \mathbb{Q}$ (fraction) mais $7/3 \notin \mathbb{D}$. $\sqrt{9} = 3 \in \mathbb{N}$. $\sqrt{2}$ est irrationnel : $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ mais $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. $\pi \in \mathbb{R}$ mais $\pi \notin \mathbb{Q}$. $-0{,}75 = -3/4 \in \mathbb{Q}$.

1.3 Pourquoi √2 n'est-il pas rationnel ? (preuve classique)

Supposons, par l'absurde, que √2 soit rationnel : $\sqrt{2} = p/q$ avec p et q entiers, $q \neq 0$, et la fraction p/q irréductible (p et q premiers entre eux). Alors $p^2 = 2q^2$, donc p^2 est pair, donc p est pair : $p = 2k$. On obtient $4k^2 = 2q^2$, soit $q^2 = 2k^2$: q^2 est pair, donc q est pair. Ainsi p et q sont tous les deux pairs, ce qui contredit le fait que p/q est irréductible. Donc √2 n'est pas rationnel : $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

2. Les opérations arithmétiques et la division euclidienne

2.1 Propriétés des opérations

> **Propriétés —** Dans $\mathbb{N}$ et dans $\mathbb{Z}$, l'addition et la multiplication sont **commutatives** ($a + b = b + a$; $a \times b = b \times a$) et **associatives** ($(a + b) + c = a + (b + c)$). La multiplication est **distributive** par rapport à l'addition : $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$. L'élément neutre de l'addition est 0 ($a + 0 = a$) et celui de la multiplication est 1 ($a \times 1 = a$).

Tout entier relatif a admet un **opposé** $-a$ tel que $a + (-a) = 0$. Tout nombre rationnel non nul a admet un **inverse** $1/a$ tel que $a \times (1/a) = 1$. Soustraire, c'est ajouter l'opposé : $a - b = a + (-b)$. Diviser, c'est multiplier par l'inverse : $a \div b = a \times (1/b)$, pour $b \neq 0$.

2.2 La division euclidienne

> **Théorème (division euclidienne) —** Pour tous entiers $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}$, *il existe un unique couple d'entiers (q ; r) tel que $a = b \times q + r$ avec $0 \leq r < b$. Le nombre q est le quotient et r est le reste** de la division euclidienne de a par b.

La condition **r < b** est essentielle : c'est elle qui rend le couple (q ; r) unique. Si on trouve un reste supérieur ou égal au diviseur, c'est que le quotient peut encore augmenter.

> **Exemple résolu —** Division euclidienne de 2025 par 7. On cherche q et r tels que $2025 = 7 \times q + r$ avec $0 \leq r < 7$. $7 \times 289 = 2023$, donc $2025 = 7 \times 289 + 2$. Le quotient est 289 et le reste est 2 (et bien $2 < 7$).

> **Exemple résolu —** Division euclidienne de 1000 par 13. $13 \times 76 = 988$, donc $1000 = 13 \times 76 + 12$. Le quotient est 76 et le reste est 12.

2.3 Multiples, diviseurs et critères de divisibilité

> **Définitions —** On dit que b **divise** a (ou que a est un **multiple** de b, ou que b est un **diviseur** de a) lorsque le reste de la division euclidienne de a par b est nul : $a = b \times q$. Exemple : 12 est divisible par 3 car $12 = 3 \times 4$.

> **Critères de divisibilité —** Un nombre est divisible par **2** s'il est pair (il se termine par 0, 2, 4, 6 ou 8) ; par **5** s'il se termine par 0 ou 5 ; par **10** s'il se termine par 0 ; par **3** si la somme de ses chiffres est divisible par 3 ; par **9** si la somme de ses chiffres est divisible par 9 ; par **4** si le nombre formé par ses deux derniers chiffres est divisible par 4.

Exemple résolu — Le nombre 2025 est-il divisible par 3 ? par 9 ? par 5 ? La somme de ses chiffres est 2 + 0 + 2 + 5 = 9 : 9 est divisible par 3 et par 9, donc 2025 est divisible par 3 et par 9. Il se termine par 5, donc il est divisible par 5. En revanche, il est impair, donc il n'est pas divisible par 2, et ses deux derniers chiffres forment 25, non divisible par 4.

3. La décomposition en produit de facteurs premiers

Définition (nombre premier) — Un **nombre premier** est un entier naturel qui possède exactement deux diviseurs : 1 et lui-même. Les premiers nombres premiers sont : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37 ; … Le nombre 1 n'est pas premier (il n'a qu'un seul diviseur). Le nombre 2 est le seul nombre premier pair.

Théorème (décomposition) — Tout entier $n \geq 2$ se décompose de façon **unique** (à l'ordre des facteurs près) en produit de nombres premiers. Exemple : $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$.

Méthode : on divise le nombre par les nombres premiers dans l'ordre croissant (2, puis 3, puis 5, …) tant que c'est possible, et on note les diviseurs utilisés. On s'arrête quand le quotient vaut 1.

Exemple résolu — Décomposer 360. 360 ÷ 2 = 180 ; 180 ÷ 2 = 90 ; 90 ÷ 2 = 45 ; 45 ÷ 3 = 15 ; 15 ÷ 3 = 5 ; 5 ÷ 5 = 1. On a divisé trois fois par 2, deux fois par 3 et une fois par 5 : $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$. Vérification : 8 × 9 × 5 = 360.

Exemple résolu — Décomposer 2025. 2025 ÷ 3 = 675 ; 675 ÷ 3 = 225 ; 225 ÷ 3 = 75 ; 75 ÷ 3 = 25 ; 25 ÷ 5 = 5 ; 5 ÷ 5 = 1. Donc $2025 = 3^4 \times 5^2$. Vérification : 81 × 25 = 2025.

La décomposition sert à **simplifier les fractions**, à calculer le **PGCD** et le **PPCM** (section suivante), et à décider si un nombre est un carré parfait (tous les exposants pairs) ou un cube parfait (tous les exposants multiples de 3). Exemple : $2025 = 3^4 \times 5^2$ a tous ses exposants pairs : c'est un carré parfait, et $\sqrt{2025} = 3^2 \times 5 = 45$.

4. Le PGCD et le PPCM

Définitions — Le **PGCD** de deux entiers a et b (non nuls) est le **plus grand diviseur commun** de a et b. Le **PPCM** de a et b est le **plus petit multiple commun** (non nul) de a et b.

4.1 Méthode par la décomposition en facteurs premiers

Règle — Pour le **PGCD**, on prend les facteurs premiers **communs** aux deux nombres, avec le **plus petit** exposant. Pour le **PPCM**, on prend **tous** les facteurs premiers des deux nombres, avec le **plus grand** exposant.

Exemple résolu — Calculer PGCD(48 ; 36) et PPCM(48 ; 36). On décompose : $48 = 2^4 \times 3$ et $36 = 2^2 \times 3^2$. PGCD(48 ; 36) = $2^2 \times 3 = 12$ (facteurs communs 2 et 3, plus petits exposants 2 et 1).

PPCM(48 ; 36) = $2^4 \times 3^2 = 144$ (tous les facteurs, plus grands exposants 4 et 2). Vérification : $48 \times 36 = 1728$ et $12 \times 144 = 1728$.

4.2 L'algorithme d'Euclide (pour le PGCD)

L'algorithme d'Euclide calcule le PGCD par des divisions euclidiennes successives : on divise le plus grand nombre par le plus petit, puis le diviseur par le reste, et ainsi de suite jusqu'à obtenir un reste nul. Le PGCD est alors le **dernier reste non nul**.

Exemple résolu — Calculer PGCD(1071 ; 462) par l'algorithme d'Euclide. $1071 = 462 \times 2 + 147$; puis $462 = 147 \times 3 + 21$; puis $147 = 21 \times 7 + 0$. Le dernier reste non nul est 21, donc PGCD(1071 ; 462) = 21. Vérification par décomposition : $1071 = 3^2 \times 7 \times 17$ et $462 = 2 \times 3 \times 7 \times 11$; les facteurs communs sont 3 et 7 : $3 \times 7 = 21$.

4.3 Propriétés et applications

Propriétés — Pour tous entiers a et b : **PGCD(a ; b) × PPCM(a ; b) = a × b**. Deux nombres sont **premiers entre eux** lorsque leur PGCD vaut 1 (exemple : 8 et 15, car PGCD(8 ; 15) = 1). Si b divise a, alors PGCD(a ; b) = b et PPCM(a ; b) = a.

Exemple résolu (fraction irréductible) — Rendre la fraction 48/36 irréductible. PGCD(48 ; 36) = 12, donc on divise le numérateur et le dénominateur par 12 : $48/36 = (48 \div 12)/(36 \div 12) = 4/3$. La fraction 4/3 est irréductible car PGCD(4 ; 3) = 1.

Exemple résolu (problème concret) — Deux bus partent ensemble d'une station. Le premier repasse toutes les 12 minutes, le second toutes les 18 minutes. Au bout de combien de temps se retrouveront-ils ensemble ? Il faut le plus petit multiple commun de 12 et 18 : PPCM(12 ; 18) = 36. Ils se retrouveront ensemble au bout de 36 minutes.

Erreur à éviter — Ne pas confondre PGCD et PPCM : le PGCD **divise** les deux nombres (il est plus petit qu'eux), tandis que le PPCM est un **multiple** des deux nombres (il est plus grand qu'eux). Dans un problème, « se retrouver ensemble » ou « en même temps » appelle le PPCM ; « partager en parts égales les plus grandes possibles » appelle le PGCD.

5. La comparaison des nombres

5.1 L'ordre dans $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$

Sur la droite graduée, un nombre est d'autant plus grand qu'il est placé à droite. Ainsi, pour deux nombres a et b, on écrit $a < b$ lorsque a est à gauche de b, et $a \leq b$ lorsque $a < b$ ou $a = b$. Dans $\mathbb{Z}$, tout nombre négatif est inférieur à tout nombre positif, et $-5 < -2$ car -5 est plus éloigné de 0 vers la gauche.

Règles de l'ordre — Si $a \leq b$, alors $\mathbf{a + c \leq b + c}$ (on peut ajouter un même nombre aux deux membres). Si $a \leq b$ et $\mathbf{c > 0}$, alors $\mathbf{a \times c \leq b \times c}$ (l'ordre est conservé). Si $a \leq b$ et $\mathbf{c < 0}$, alors $\mathbf{a \times c \geq b \times c}$ (l'ordre est renversé — c'est le point le plus souvent oublié). En particulier, $a \leq b$ équivaut à $-a \geq -b$.

5.2 Comparer deux fractions

Pour comparer deux fractions, on peut les réduire au **même dénominateur** (la plus grande est celle qui a le plus grand numérateur), ou utiliser le **produit en croix** : pour des dénominateurs strictement positifs, $a/b < c/d$ si et seulement si $a \times d < c \times b$.

Exemple résolu — Comparer 3/7 et 4/9. Produit en croix : $3 \times 9 = 27$ et $4 \times 7 = 28$. Comme $27 < 28$, on a $3/7 < 4/9$.

Exemple résolu — Comparer $-5/6$ et $-7/8$. On réduit au même dénominateur 24 : $-5/6 = -20/24$ et $-7/8 = -21/24$. Or $-20 > -21$, donc $-5/6 > -7/8$. Attention : pour les nombres négatifs, la fraction dont le numérateur est le plus grand (en valeur absolue la plus petite) est la plus grande.

5.3 Encadrement et valeur absolue

Définition (valeur absolue) — La **valeur absolue** d'un nombre a, notée $|a|$, est sa distance à 0 : $|a| = a$ si $a \geq 0$ et $|a| = -a$ si $a < 0$. Exemples : $|-3| = 3$; $|2{,}5| = 2{,}5$; $|0| = 0$.

Exemple résolu (encadrement) — Encadrer $\sqrt{2}$ au centième près. On calcule $1{,}41^2 = 1{,}9881 < 2$ et $1{,}42^2 = 2{,}0164 > 2$. Donc $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$.

Un encadrement utile : pour tout réel x, $|x| < 2$ signifie $-2 < x < 2$. Plus généralement, $|x - a| < r$ signifie que x est à une distance de a inférieure à r, c'est-à-dire $a - r < x < a + r$.

6. Les puissances

6.1 Définitions

Définitions — Pour un nombre a et un entier $n \geq 1$, **a^{n} = a × a × … × a** (n facteurs). Par convention, **a^{0} = 1** (pour $a \neq 0$) et **a^{−n} = 1/a^{n}** (pour $a \neq 0$). Exemples : $2^5 = 32$; $3^0 = 1$; $5^{-2} = 1/25 = 0{,}04$.

Erreur à éviter — Ne pas confondre a^n et $a \times n$: $2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$, et non $2 \times 5 = 10$. De même, $(-2)^2 = 4$ mais $-2^2 = -4$: les parenthèses changent tout, car -2^2 signifie $-(2^2)$.

6.2 Règles de calcul

Règles — Pour tous nombres a, b (non nuls si besoin) et tous entiers m, n : **a^{n} × a^{m} = a^{n+m}** ; **a^{n} / a^{m} = a^{n−m}** ; **(a^{n})^{m} = a^{n×m}** ; **(a × b)^{n} = a^{n} × b^{n}** ; **(a/b)^{n} = a^{n} / b^{n}**.

Exemple résolu — Calculer $2^5 \times 2^3$. On applique $a^n \times a^m = a^{n+m}$: $2^5 \times 2^3 = 2^8 = 256$.

Exemple résolu — Calculer $(3^2)^3$ et $(2/3)^{-2}$. $(3^2)^3 = 3^{2\times3} = 3^6 = 729$. $(2/3)^{-2} = (3/2)^2 = 9/4$, car un exposant négatif inverse la fraction.

6.3 Puissances de 10 et notation scientifique

Les puissances de 10 servent à écrire les très grands et les très petits nombres : $10^3 = 1000$; $10^{-3} = 0{,}001$. La **notation scientifique** d'un nombre est son écriture sous la forme **a × 10^{n}**, où $1 \leq a < 10$ et n est un entier relatif.

Exemple résolu — Écrire 3 400 000 en notation scientifique : $3\,400\,000 = 3{,}4 \times 10^6$. Écrire 0,00052 en notation scientifique : $0{,}00052 = 5{,}2 \times 10^{-4}$. Calculer $(4 \times 10^2) \times (2 \times 10^3)$: on regroupe $(4 \times 2) \times 10^{2+3} = 8 \times 10^5 = 800\,000$.

7. Les identités remarquables

Définitions — Pour tous nombres a et b : $\mathbf{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$; $\mathbf{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$; $\mathbf{(a+b)(a-b) = a^2 - b^2}$. Ce sont les trois identités remarquables à connaître par cœur.

D'où viennent-elles ? Par simple développement : $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$. De même, $(a+b)(a-b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$: le terme en ab disparaît.

7.1 Développer

Exemple résolu — Développer $(x+5)^2$: $(x+5)^2 = x^2 + 2 \times x \times 5 + 5^2 = x^2 + 10x + 25$.

Exemple résolu — Développer $(2x-3)^2$: $(2x-3)^2 = (2x)^2 - 2 \times 2x \times 3 + 3^2 = 4x^2 - 12x + 9$.

Exemple résolu — Développer $(x+4)(x-4)$: $(x+4)(x-4) = x^2 - 4^2 = x^2 - 16$.

7.2 Factoriser

Factoriser, c'est reconnaître une identité remarquable « à l'envers » : $x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$ car $6x = 2 \times x \times 3$; $4x^2 - 25 = (2x)^2 - 5^2 = (2x-5)(2x+5)$; $x^2 - 10x + 25 = (x-5)^2$.

Erreur à éviter — Dans $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, le double produit est **soustrait** et le dernier terme est **toujours positif** ($+ b^2$). Oublier le double produit 2ab est l'erreur la plus fréquente : $(x+5)^2$ n'est pas $x^2 + 25$, mais $x^2 + 10x + 25$.

7.3 Calcul mental

Exemple résolu — Calculer 102^2 de tête : $102^2 = (100+2)^2 = 100^2 + 2 \times 100 \times 2 + 2^2 = 10\,000 + 400 + 4 = 10\,404$.

Exemple résolu — Calculer 99^2 et 53×47 de tête. $99^2 = (100-1)^2 = 10\,000 - 200 + 1 = 9\,801$. $53 \times 47 = (50+3)(50-3) = 50^2 - 3^2 = 2\,500 - 9 = 2\,491$.

Exemple résolu — Calculer $37^2 - 13^2$ sans calculatrice : $37^2 - 13^2 = (37-13)(37+13) = 24 \times 50 = 1\,200$.

8. Les nombres sexagésimaux

Définition — Le système **sexagésimal** est un système de numération en base 60. Il sert pour les **durées** (1 h = 60 min ; 1 min = 60 s ; donc 1 h = 3 600 s) et pour les **angles** (1° = 60′ ; 1′ = 60″ ; donc 1° = 3 600″). Le symbole ′ se lit « minute » et ″ « seconde » (d'angle).

8.1 Conversions

Pour convertir, on divise ou on multiplie par 60 : 2,5 h = 2 h + 0,5 × 60 min = 2 h 30 min ; 135 min = 2 × 60 min + 15 min = 2 h 15 min ; 1,2° = 1° + 0,2 × 60′ = 1° 12′.

Exemple résolu — Convertir 7 245 s en heures, minutes et secondes. 7 245 ÷ 3 600 = 2 reste 45 (2 × 3 600 = 7 200). Donc 7 245 s = 2 h 0 min 45 s.

8.2 Opérations sur les durées

On additionne et on soustrait colonne par colonne (heures, minutes, secondes), en gérant les **retenues** et les **emprunts** de 60, comme en base 10 mais avec 60 au lieu de 10.

Exemple résolu (addition) — Calculer 2 h 45 min + 1 h 30 min. On additionne : 2 h + 1 h = 3 h ; 45 min + 30 min = 75 min. Or 75 min = 1 h 15 min, donc le total est 3 h + 1 h 15 min = 4 h 15 min.

Exemple résolu (soustraction) — Calculer 3 h 20 min − 1 h 45 min. On ne peut pas soustraire 45 min de 20 min : on emprunte 1 h à 3 h. 3 h 20 min = 2 h 80 min. Alors 2 h 80 min − 1 h 45 min = 1 h 35 min.

Exemple résolu (problème) — Un film de 2 h 37 min commence à 14 h 50. À quelle heure se termine-t-il ? 14 h 50 min + 2 h 37 min = 16 h 87 min = 17 h 27 min (87 min = 1 h 27 min). Le film se termine à 17 h 27.

Exercices d'entraînement (type concours)

Les exercices suivants sont des **exercices d'entraînement proposés** : ils suivent le style et le niveau des questions de l'épreuve de spécialité, et leurs solutions sont détaillées étape par étape.

Exercice 1 — Ensembles et décomposition (proposé)

1) Parmi les nombres suivants, indiquer ceux qui appartiennent à $\mathbb{N}$, à $\mathbb{Z}$, à $\mathbb{Q}$ (sans appartenir à $\mathbb{N}$) et à $\mathbb{R}$ sans appartenir à $\mathbb{Q}$: -4 ; 0 ; 3,5 ; 12/5 ; $\sqrt{16}$; $\sqrt{3}$; π.

2) Décomposer 420 en produit de facteurs premiers.

Solution détaillée — Exercice 1

1) -4 est un entier négatif : $-4 \in \mathbb{Z}$, $-4 \notin \mathbb{N}$. $0 \in \mathbb{N}$ (donc $\in \mathbb{Z}$, $\in \mathbb{Q}$, $\in \mathbb{R}$). 3,5 = 7/2 : c'est un décimal, donc $3{,}5 \in \mathbb{Q}$ (mais $\notin \mathbb{N}$, $\notin \mathbb{Z}$). 12/5 = 2,4 $\in \mathbb{Q}$. $\sqrt{16} = 4 \in \mathbb{N}$. $\sqrt{3}$ est irrationnel : $\sqrt{3} \in \mathbb{R}$ mais $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$. π est irrationnel : $\pi \in \mathbb{R}$ mais $\pi \notin \mathbb{Q}$.

2) 420 ÷ 2 = 210 ; 210 ÷ 2 = 105 ; 105 ÷ 3 = 35 ; 35 ÷ 5 = 7 ; 7 ÷ 7 = 1. Donc $420 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7$. Vérification : $4 \times 3 \times 5 \times 7 = 420$.

Exercice 2 — Division euclidienne et divisibilité (proposé)

1) Effectuer la division euclidienne de 2026 par 11 (quotient et reste).

2) Le nombre 2026 est-il divisible par 3 ? par 9 ? par 4 ? Justifier.

Solution détaillée — Exercice 2

1) $11 \times 184 = 2024$, donc $2026 = 11 \times 184 + 2$, avec $0 \leq 2 < 11$. Le quotient est 184 et le reste est 2.

2) La somme des chiffres de 2026 est $2 + 0 + 2 + 6 = 10$. 10 n'est divisible ni par 3 ni par 9, donc 2026 n'est divisible ni par 3 ni par 9. Ses deux derniers chiffres forment 26, non divisible par 4, donc 2026 n'est pas divisible par 4.

Exercice 3 — PGCD, PPCM et problème (proposé)

1) Calculer PGCD(72 ; 120) et PPCM(72 ; 120) en utilisant la décomposition en facteurs premiers.

2) Deux trains passent par une gare toutes les 24 minutes et toutes les 36 minutes. Ils viennent de passer ensemble : dans combien de temps repasseront-ils ensemble ?

Solution détaillée — Exercice 3

1) $72 = 2^3 \times 3^2$ et $120 = 2^3 \times 3 \times 5$. PGCD(72 ; 120) $= 2^3 \times 3 = 24$ (facteurs communs, plus petits exposants). PPCM(72 ; 120) $= 2^3 \times 3^2 \times 5 = 360$ (tous les facteurs, plus grands exposants). Vérification : $24 \times 360 = 8\,640 = 72 \times 120$.

2) Il faut le plus petit multiple commun de 24 et 36 : $24 = 2^3 \times 3$ et $36 = 2^2 \times 3^2$, donc PPCM(24 ; 36) $= 2^3 \times 3^2 = 72$. Les deux trains repasseront ensemble dans 72 minutes, soit 1 h 12 min.

Exercice 4 — Puissances et notation scientifique (proposé)

1) Calculer $A = (2^3 \times 2^{-1})^2$.

2) Écrire 0,0000045 en notation scientifique.

3) Calculer $3 \times 10^4 + 2 \times 10^3$ et donner le résultat en notation scientifique.

Solution détaillée — Exercice 4

1) D'abord $2^3 \times 2^{-1} = 2^{3-1} = 2^2 = 4$, puis $A = 4^2 = 16$. (On peut aussi écrire $A = (2^2)^2 = 2^4 = 16$.)

2) $0{,}0000045 = 4{,}5 \times 10^{-6}$ car il faut déplacer la virgule de 6 rangs vers la droite.

3) $3 \times 10^4 = 30\,000$ et $2 \times 10^3 = 2\,000$, donc la somme vaut $32\,000 = 3{,}2 \times 10^4$.

Exercice 5 — Identités remarquables (proposé)

1) Développer $(3x + 2)^2$.

2) Factoriser $9x^2 - 16$.

3) Calculer 98^2 de tête en utilisant une identité remarquable.

Solution détaillée — Exercice 5

1) $(3x + 2)^2 = (3x)^2 + 2 \times 3x \times 2 + 2^2 = 9x^2 + 12x + 4$.

2) $9x^2 - 16 = (3x)^2 - 4^2 = (3x - 4)(3x + 4)$ (troisième identité, $a^2 - b^2$).

3) $98^2 = (100 - 2)^2 = 100^2 - 2 \times 100 \times 2 + 2^2 = 10\,000 - 400 + 4 = 9\,604$.

Exercice 6 — Comparaison et durées (proposé)

1) Comparer 5/8 et 7/11.

2) Un train part à 8 h 35 min et arrive à 11 h 20 min. Quelle est la durée du trajet ?

Solution détaillée — Exercice 6

1) Produit en croix : 5 × 11 = 55 et 7 × 8 = 56. Comme 55 < 56, on a 5/8 < 7/11.

2) 11 h 20 min − 8 h 35 min : on emprunte 1 h à 11 h, soit 11 h 20 min = 10 h 80 min. 10 h 80 min − 8 h 35 min = 2 h 45 min. La durée du trajet est 2 h 45 min.

À retenir

À retenir — l'essentiel de la leçon

Inclusions : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$; $\sqrt{2}$ et π sont irrationnels ($\notin \mathbb{Q}$).

Division euclidienne : $a = b \times q + r$ avec $0 \leq r < b$ (q quotient, r reste).

Décomposition : tout entier $n \geq 2$ s'écrit de façon unique en produit de facteurs premiers.

PGCD et PPCM : PGCD = facteurs communs, plus petits exposants ; PPCM = tous les facteurs, plus grands exposants ; PGCD(a ; b) × PPCM(a ; b) = a × b.

Comparaison : multiplier par un nombre négatif renverse l'ordre ; pour les fractions, utiliser le produit en croix.

Puissances : $a^n \times a^m = a^{n+m}$; $(a^n)^m = a^{n \times m}$; $a^{-n} = 1/a^n$; notation scientifique $a \times 10^n$ ($1 \leq a < 10$).

Identités remarquables : $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$; $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

Nombres sexagésimaux : 1 h = 60 min = 3 600 s ; 1° = 60′ = 3 600″ ; retenues et emprunts de 60.

Prochaine leçon : **Proportionnalité** (coefficient de proportionnalité, masse volumique, vitesse moyenne, capital et intérêt, échelle des cartes et des plans).

Source : Descriptif officiel du concours de recrutement des enseignants du primaire (spécialité, filière bilingue), sessions 2023, 2024 et 2025 — domaine « Nombres et calcul », premier groupe : « Ensembles de nombres et les opérations arithmétiques ». Les exercices de cette leçon sont des exercices d'entraînement proposés par l'auteur ; ils seront remplacés par des questions d'épreuves antérieures dès leur collecte.