EDUTECH

RÉVISION — CONCOURS DE L'ENSEIGNEMENT (PRIMAIRE)

Proportionnalité

Coefficient de proportionnalité, vitesse, masse volumique, intérêt simple et échelle • Mathématiques — Spécialité • Leçon 2

Domaine « Nombres et calcul » : 7 % de l'épreuve de spécialité (sessions 2023–2025) — 6 % en 2022 • Le domaine couvre les leçons 1, 2 et 3 (nombres, proportionnalité, équations) • Source : descriptif officiel du concours

Objectifs de la leçon

- Reconnaître une **situation de proportionnalité** et compléter un **tableau de proportionnalité**.
- Calculer et utiliser le **coefficient de proportionnalité**.
- Appliquer le **produit en croix** pour trouver la **quatrième proportionnelle**.
- Calculer un **pourcentage**, une augmentation ou une réduction.
- Utiliser la relation entre distance, durée et **vitesse moyenne** ($v = d/t$).
- Calculer une **masse volumique** et en déduire une masse ou un volume ($\rho = m/V$).
- Calculer un **intérêt simple** ($I = C \times t \times n / 100$) et utiliser l'**échelle** d'une carte ou d'un plan.

Plan de la leçon

1. La proportionnalité et le tableau de proportionnalité
2. Le coefficient de proportionnalité et le produit en croix
3. Les pourcentages
4. La vitesse moyenne
5. La masse volumique
6. L'intérêt simple
7. L'échelle des cartes et des plans
8. Exercices d'entraînement (type concours) avec solutions détaillées
9. À retenir

1. La proportionnalité et le tableau de proportionnalité

1.1 Définition

Définition — Deux grandeurs sont **proportionnelles** lorsque les valeurs de l'une s'obtiennent en multipliant les valeurs de l'autre par un même nombre, appelé **coefficient de proportionnalité**. Exemple : le prix des oranges est proportionnel à la masse achetée — si 1 kg coûte 4 dh, alors 2 kg coûtent 8 dh, 3 kg coûtent 12 dh, et ainsi de suite.

Un **tableau de proportionnalité** présente les deux grandeurs en deux lignes : chaque colonne donne un couple de valeurs correspondantes. Dans un tel tableau, le rapport entre les deux valeurs d'une même colonne est toujours le même.

Exemple résolu — 5 kg de pommes coûtent 20 dh. Combien coûtent 8 kg de pommes ? Le prix est proportionnel à la masse : 1 kg coûte 20 ÷ 5 = 4 dh. Donc 8 kg coûtent 8 × 4 = 32 dh.

1.2 Propriétés du tableau de proportionnalité

Propriétés — Dans un tableau de proportionnalité, on peut : **additionner** deux colonnes (la somme des valeurs d'une ligne correspond à la somme des valeurs de l'autre ligne) ; **multiplier** une colonne par un nombre (on multiplie les deux valeurs par ce même nombre) ; **passer par l'unité** (calculer la valeur pour 1, puis multiplier).

Exemple résolu — Un robinet remplit 12 litres en 3 minutes. Combien de litres remplit-il en 7 minutes ?
En 1 minute, il remplit 12 ÷ 3 = 4 litres (passage par l'unité). En 7 minutes, il remplit 7 × 4 = 28 litres.

Erreur à éviter — Toute situation avec deux grandeurs qui augmentent ensemble n'est pas proportionnelle : le prix d'un trajet en taxi (prise en charge fixe + prix au kilomètre) n'est pas proportionnel à la distance, car le prix pour 0 km n'est pas 0 dh. Dans un tableau de proportionnalité, **le passage par 0 donne 0** : à 0 kg correspond 0 dh.

2. Le coefficient de proportionnalité et le produit en croix

2.1 Le coefficient de proportionnalité

Définition — Le **coefficient de proportionnalité** est le nombre par lequel on multiplie les valeurs de la première grandeur pour obtenir les valeurs correspondantes de la seconde grandeur. Si y = k × x, alors k est le coefficient de proportionnalité.

Comment le calculer — On choisit une colonne complète du tableau et on **divise** la valeur de la seconde ligne par la valeur correspondante de la première ligne : **k = y ÷ x**. Une fois k connu, on obtient n'importe quelle valeur manquante par multiplication ou par division.

Exemple résolu — 3 kg d'oranges coûtent 12 dh. Quel est le coefficient de proportionnalité ? Combien coûtent 7 kg ?

k = 12 ÷ 3 = 4 : 1 kg coûte 4 dh. Donc 7 kg coûtent 7 × 4 = 28 dh. Inversement, avec 45 dh on peut acheter 45 ÷ 4 = 11,25 kg d'oranges.

2.2 Le produit en croix et la quatrième proportionnelle

Définition (quatrième proportionnelle) — Dans une situation de proportionnalité, la **quatrième proportionnelle** est la valeur inconnue d'un tableau à quatre cases dont trois sont connues. On la trouve par le **produit en croix**.

Produit en croix — Si a/b = c/d, alors **a × d = b × c** (les produits en croix sont égaux). Pour trouver la valeur inconnue x dans a/b = c/x, on calcule **x = (b × c) ÷ a**.

Exemple résolu — 4 stylos coûtent 10 dh. Combien coûtent 7 stylos ? On pose x le prix de 7 stylos : 4/10 = 7/x, donc 4 × x = 7 × 10 = 70, et x = 70 ÷ 4 = 17,5 dh. Vérification : le coefficient est 10 ÷ 4 = 2,5 dh par stylo ; 7 × 2,5 = 17,5 dh.

Erreur à éviter — Le produit en croix ne s'applique que si la situation est **proportionnelle**. Avant de l'utiliser, on vérifie que les rapports sont égaux (ou que le passage par 0 donne 0). Sinon, le résultat est faux.

3. Les pourcentages

3.1 Définition et calculs de base

Définition — Un **pourcentage** est une proportion exprimée sur 100 : **p % d'une quantité Q, c'est (p ÷ 100) × Q**. Ainsi, 25 % de 200, c'est 0,25 × 200 = 50.

Les trois calculs de base — Calculer **p % de Q** : (p × Q) ÷ 100. Trouver **le pourcentage** que représente a dans Q : (a ÷ Q) × 100. Retrouver **la quantité totale Q** quand on connaît p % de Q, qui vaut a : Q = (a × 100) ÷ p.

Exemple résolu — Dans une classe de 30 élèves, 12 sont des filles. Quel est le pourcentage de filles ? (12 ÷ 30) × 100 = 0,4 × 100 = 40 %. Il y a 40 % de filles dans la classe.

Exemple résolu — Un article coûte 200 dh. Son prix augmente de 25 %. Quel est le nouveau prix ? L'augmentation est de 0,25 × 200 = 50 dh. Le nouveau prix est 200 + 50 = 250 dh. On peut aussi multiplier directement par (1 + 25/100) = 1,25 : 200 × 1,25 = 250 dh.

3.2 Augmentations et réductions successives

Règle — Augmenter de t % revient à multiplier par **(1 + t/100)**. Réduire de t % revient à multiplier par **(1 − t/100)**. Pour des variations successives, on **multiplie les coefficients** : augmenter de 10 % puis réduire de 10 % ne ramène pas au prix de départ (1,10 × 0,90 = 0,99, soit une baisse globale de 1 %).

Exemple résolu — Un article à 200 dh est soldé à −15 %. Quel est son prix soldé ? Le coefficient est 1 − 15/100 = 0,85. Le prix soldé est 200 × 0,85 = 170 dh. La réduction est de 200 − 170 = 30 dh.

Erreur à éviter — Ne pas confondre « points de pourcentage » et « pour cent » : passer d'un taux de 20 % à un taux de 25 %, c'est une hausse de **5 points**, mais une hausse relative de 25 % (5 ÷ 20 = 0,25).

4. La vitesse moyenne

4.1 Définition et formules

Définition — La **vitesse moyenne** v d'un mobile est le quotient de la distance d parcourue par la durée t du parcours : **v = d ÷ t**. On en déduit **d = v × t** et **t = d ÷ v**.

Unités — Si d est en kilomètres et t en heures, v est en **km/h**. Si d est en mètres et t en secondes, v est en **m/s**. Conversion : **1 m/s = 3,6 km/h** (on multiplie par 3,6 pour passer de m/s en km/h, on divise par 3,6 pour l'inverse).

Exemple résolu — Une voiture parcourt 240 km en 3 heures. Quelle est sa vitesse moyenne ?
v = 240 ÷ 3 = 80 km/h.

Exemple résolu — Convertir 90 km/h en m/s. 90 ÷ 3,6 = 25 : 90 km/h = 25 m/s. Inversement, 10 m/s = 10 × 3,6 = 36 km/h.

4.2 Durée et distance

Exemple résolu — Un train roule à 75 km/h. Combien de temps met-il pour parcourir 150 km ?
t = d ÷ v = 150 ÷ 75 = 2 h. Le trajet dure 2 heures.

Exemple résolu — Un cycliste roule à 20 km/h pendant 45 minutes. Quelle distance parcourt-il ?
45 min = 0,75 h. Donc d = v × t = 20 × 0,75 = 15 km.

Erreur à éviter — La vitesse moyenne n'est pas la moyenne des vitesses : si on parcourt 60 km à 60 km/h puis 60 km à 120 km/h, la vitesse moyenne n'est pas 90 km/h. Les durées sont 1 h et 0,5 h : v = 120 ÷ 1,5 = 80 km/h. Il faut toujours revenir à la définition v = distance totale ÷ durée totale.

5. La masse volumique

5.1 Définition

Définition — La **masse volumique** ρ (rhô) d'une substance est le quotient de sa masse m par son volume V : **ρ = m ÷ V**. On en déduit **m = ρ × V** et **V = m ÷ ρ**.

Unités — Si m est en grammes et V en cm^3, ρ est en **g/cm^3**. Si m est en kilogrammes et V en m^3, ρ est en **kg/m^3**. Références : l'eau a une masse volumique de **1 g/cm^3** (1 kg par litre) ; l'huile, environ 0,9 g/cm^3 — c'est pourquoi l'huile flotte sur l'eau.

Exemple résolu — Quelle est la masse de 2 litres d'eau ? 2 L = 2 000 cm^3. m = ρ × V = 1 × 2 000 = 2 000 g = 2 kg. Un litre d'eau pèse 1 kg : c'est la référence à retenir.

Exemple résolu — Quel est le volume de 900 g d'huile de masse volumique 0,9 g/cm^3 ? V = m ÷ ρ = 900 ÷ 0,9 = 1 000 cm^3 = 1 L.

Erreur à éviter — Les unités doivent être **cohérentes** : on ne mélange pas les litres et les cm^3 sans convertir (1 L = 1 dm^3 = 1 000 cm^3). Une masse volumique en g/cm^3 multipliée par un volume en litres donne un résultat faux d'un facteur 1 000 si on oublie la conversion.

6. L'intérêt simple

6.1 Définitions

Définitions — Le **capital** C est la somme placée ou empruntée. Le **taux d'intérêt** t est le pourcentage appliqué par période (souvent par an). La **durée** n est le nombre de périodes. L'**intérêt** I est la somme gagnée (ou à payer) : c'est le « loyer » de l'argent.

Formule de l'intérêt simple — L'intérêt simple est proportionnel au capital, au taux et à la durée : **I = (C × t × n) ÷ 100**. La **valeur acquise** (capital + intérêt) vaut **C + I**.

Le taux et la durée doivent être exprimés dans la **même unité de temps** : si le taux est annuel, n est en années. Une durée de 6 mois vaut n = 6/12 = 0,5 année ; une durée de 9 mois vaut n = 0,75 année.

Exemple résolu — On place un capital de 5 000 dh à un taux annuel de 4 % pendant 3 ans. Quel est l'intérêt ? Quelle est la valeur acquise ? I = (5 000 × 4 × 3) ÷ 100 = 600 dh. La valeur acquise est 5 000 + 600 = 5 600 dh.

Exemple résolu — On place 5 000 dh à 4 % par an pendant 6 mois. Quel est l'intérêt ? 6 mois = 0,5 année. I = (5 000 × 4 × 0,5) ÷ 100 = 100 dh.

6.2 Retrouver le capital, le taux ou la durée

La formule I = (C × t × n) ÷ 100 est une relation de proportionnalité entre I et chacun des trois autres nombres : on peut donc la « retourner » par le produit en croix. Par exemple, pour retrouver le capital : **C = (I × 100) ÷ (t × n)**.

Exemple résolu — Un placement rapporte 240 dh d'intérêt en 2 ans à un taux de 3 % par an. Quel était le capital ?
C = (240 × 100) ÷ (3 × 2) = 24 000 ÷ 6 = 4 000 dh.

Erreur à éviter — L'intérêt **simple** ne se calcule que sur le capital de départ, jamais sur les intérêts déjà gagnés. Si les intérêts s'ajoutent chaque année au capital (intérêts composés), la formule I = (C × t × n) ÷ 100 ne s'applique plus — ce cas n'est pas au programme du concours.

7. L'échelle des cartes et des plans

7.1 Définition

Définition — L'**échelle** d'une carte ou d'un plan est le rapport entre une distance mesurée sur la carte et la distance réelle correspondante, exprimées dans la **même unité** : **échelle = distance sur la carte ÷ distance réelle**. On l'écrit souvent sous la forme **1/d** : une échelle de 1/25 000 signifie que 1 cm sur la carte représente 25 000 cm (soit 250 m) dans la réalité.

Formules — Distance réelle = distance sur la carte × d (d est le dénominateur de l'échelle). **Distance sur la carte = distance réelle ÷ d**. Plus le dénominateur d est grand, plus l'échelle est **petite** (la carte couvre une grande région avec peu de détails).

Exemple résolu — Sur une carte au 1/25 000, deux villages sont distants de 4 cm. Quelle est la distance réelle ?
Distance réelle = 4 × 25 000 = 100 000 cm = 1 000 m = 1 km.

Exemple résolu — Sur un plan au 1/100, une chambre mesure 8 m de long dans la réalité. Quelle est sa longueur sur le plan ?
8 m = 800 cm. Longueur sur le plan = 800 ÷ 100 = 8 cm.

7.2 Conversions d'unités sur les cartes

Les distances sur la carte sont en **centimètres**, les distances réelles en **centimètres** aussi dans le calcul, puis on convertit : 1 km = 100 000 cm ; 1 m = 100 cm. Astuce : sur une carte au 1/50 000, 1 cm représente 50 000 cm = 500 m = 0,5 km.

Exemple résolu — Sur une carte au 1/50 000, une route mesure 6,4 cm. Quelle est sa longueur réelle en kilomètres ?
Longueur réelle = 6,4 × 50 000 = 320 000 cm = 3,2 km.

Erreur à éviter — Ne pas oublier de convertir les unités **avant** de comparer : une distance réelle calculée en centimètres doit être convertie en mètres ou en kilomètres selon la question. Et sur un plan, une échelle de 1/100 ne signifie pas « 1 cm = 100 m » mais « 1 cm = 100 cm = 1 m ».

Exercices d’entraînement (type concours)

Les exercices suivants sont des **exercices d’entraînement proposés** : ils suivent le style et le niveau des questions de l’épreuve de spécialité, et leurs solutions sont détaillées étape par étape.

Exercice 1 — Tableau de proportionnalité (proposé)

1) 3 kg d’oranges coûtent 12 dh. Compléter le tableau : masse (kg) : 1 ; 5 ; 7 ; 11,25 — prix (dh) : ?

2) Avec 45 dh, quelle masse d’oranges peut-on acheter ?

Solution détaillée — Exercice 1

1) Le coefficient de proportionnalité est 12 ÷ 3 = 4 dh par kg. 1 kg coûte 4 dh ; 5 kg coûtent 5 × 4 = 20 dh ; 7 kg coûtent 7 × 4 = 28 dh ; 11,25 kg coûtent 11,25 × 4 = 45 dh.

2) Avec 45 dh, on peut acheter 45 ÷ 4 = 11,25 kg d’oranges.

Exercice 2 — Pourcentages (proposé)

1) Dans une classe de 30 élèves, 40 % sont des filles. Combien y a-t-il de filles ? de garçons ?

2) Un article coûte 350 dh. Il est soldé à −25 %. Quel est son prix soldé ?

Solution détaillée — Exercice 2

1) Nombre de filles : 0,40 × 30 = 12. Nombre de garçons : 30 − 12 = 18.

2) Le coefficient de réduction est 1 − 25/100 = 0,75. Le prix soldé est 350 × 0,75 = 262,5 dh.

Exercice 3 — Vitesse moyenne (proposé)

1) Un train parcourt 360 km en 4 h 30 min. Quelle est sa vitesse moyenne ?

2) Une voiture roule à 90 km/h pendant 2 h 15 min. Quelle distance parcourt-elle ?

Solution détaillée — Exercice 3

1) 4 h 30 min = 4,5 h. v = 360 ÷ 4,5 = 80 km/h.

2) 2 h 15 min = 2,25 h. d = v × t = 90 × 2,25 = 202,5 km.

Exercice 4 — Masse volumique (proposé)

1) Quelle est la masse de 3,5 L d’huile de masse volumique 0,92 g/cm³ ?

2) Quel est le volume occupé par 2 kg d’eau (masse volumique 1 g/cm³) ?

Solution détaillée — Exercice 4

1) 3,5 L = 3 500 cm³. m = ρ × V = 0,92 × 3 500 = 3 220 g = 3,22 kg.

2) 2 kg = 2 000 g. V = m ÷ ρ = 2 000 ÷ 1 = 2 000 cm³ = 2 L.

Exercice 5 — Intérêt simple (proposé)

Un capital de 8 000 dh est placé à un taux annuel de 5 % pendant 2 ans et 6 mois. Calculer l’intérêt produit et la valeur acquise.

Solution détaillée — Exercice 5

2 ans et 6 mois = 2,5 années. $I = (8\,000 \times 5 \times 2{,}5) \div 100 = 1\,000$ dh. La valeur acquise est 8 000 + 1 000 = 9 000 dh.

Exercice 6 — Échelle (proposé)

1) Sur une carte au 1/50 000, une route mesure 6,4 cm. Quelle est sa longueur réelle en kilomètres ?

2) Sur un plan au 1/200, une pièce mesure 3 cm de long et 2,5 cm de large. Quelles sont ses dimensions réelles en mètres ?

Solution détaillée — Exercice 6

1) Longueur réelle = 6,4 × 50 000 = 320 000 cm = 3,2 km.

2) Longueur réelle = 3 × 200 = 600 cm = 6 m. Largeur réelle = 2,5 × 200 = 500 cm = 5 m. La pièce mesure 6 m sur 5 m.

À retenir

À retenir — l'essentiel de la leçon

Proportionnalité : $y = k \times x$; le coefficient $k = y \div x$; à 0 correspond 0.

Produit en croix : si $a/b = c/d$, alors $a \times d = b \times c$ (quatrième proportionnelle).

Pourcentages : p % de Q = $(p \times Q) \div 100$; augmenter de t % : $\times (1 + t/100)$; réduire de t % : $\times (1 - t/100)$.

Vitesse moyenne : $v = d \div t$; $d = v \times t$; $t = d \div v$; 1 m/s = 3,6 km/h.

Masse volumique : $\rho = m \div V$; $m = \rho \times V$; $V = m \div \rho$; eau : 1 g/cm³.

Intérêt simple : $I = (C \times t \times n) \div 100$; valeur acquise = C + I ; taux et durée dans la même unité de temps.

Échelle 1/d : distance réelle = distance sur la carte × d ; distance sur la carte = distance réelle ÷ d.

Prochaine leçon : **Équations et inéquations** (équations du premier et du deuxième degré, inéquations, systèmes de deux équations à deux inconnues).

Source : Descriptif officiel du concours de recrutement des enseignants du primaire (spécialité, filière bilingue), sessions 2023, 2024 et 2025 — domaine « Nombres et calcul » : « coefficient de proportionnalité ; masse volumique ; vitesse moyenne ; capital ; taux d'intérêt ; intérêt ; échelle des cartes et des plans ». Les exercices de cette leçon sont des exercices d'entraînement proposés par l'auteur ; ils seront remplacés par des questions d'épreuves antérieures dès leur collecte.