EDUTECH

RÉVISION — CONCOURS DE L'ENSEIGNEMENT (PRIMAIRE)

Géométrie dans l'espace

Solides réguliers, patrons, droites et plans dans l'espace, positions relatives • Mathématiques — Spécialité • Leçon 5

Domaine « Géométrie dans l'espace » : 7 % de l'épreuve de spécialité (sessions 2023–2025) • Source : descriptif officiel du concours

Objectifs de la leçon

- Nommer et décrire les **solides réguliers** : cube, pavé droit, prisme, pyramide, cylindre, cône, sphère.
- Construire et reconnaître le **patron** d'un solide.
- Décrire les **droites et les plans** dans l'espace et leurs positions relatives.
- Calculer les **volumes** et les **aires** des solides usuels.

Plan de la leçon

1. Les solides réguliers : description

2. Les patrons des solides

3. Droites et plans dans l'espace

4. Positions relatives dans l'espace

5. Volumes et aires des solides

6. Exercices d'entraînement (type concours) avec solutions détaillées

7. À retenir

1. Les solides réguliers : description

1.1 Vocabulaire

> **Définitions —** Un **solide** est un objet de l'espace limité par des surfaces. Une **face** est une surface plane (ou courbe) qui limite le solide ; une **arête** est un segment où se rencontrent deux faces ; un **sommet** est un point où se rencontrent plusieurs arêtes. Un **polyèdre** est un solide dont toutes les faces sont des polygones.

> **Relation d'Euler —** Pour un polyèdre convexe, si F est le nombre de faces, A le nombre d'arêtes et S le nombre de sommets, on a la relation d'Euler : **F + S − A = 2**.

Exemple résolu — Un cube a 6 faces et 8 sommets. Combien a-t-il d'arêtes ? D'après la relation d'Euler : $6 + 8 - A = 2$, donc $A = 12$. Le cube a 12 arêtes.

1.2 Les principaux solides

Le cube et le pavé droit — Le **cube** est un polyèdre à 6 faces carrées identiques : 6 faces, 12 arêtes (toutes de même longueur a), 8 sommets. Le **pavé droit** (parallélépipède rectangle) est un polyèdre à 6 faces rectangulaires : 6 faces, 12 arêtes, 8 sommets. Le cube est un cas particulier de pavé droit (toutes les arêtes égales).

Le prisme droit et la pyramide — Un **prisme droit** a deux faces polygonales identiques et parallèles (les **bases**) reliées par des faces rectangulaires (les **faces latérales**). Un prisme à base triangulaire a 5 faces, 9 arêtes et 6 sommets. Une **pyramide** a une base polygonale et des faces latérales triangulaires qui se rejoignent en un sommet, l'**apex**. Une pyramide à base carrée a 5 faces, 8 arêtes et 5 sommets.

Le cylindre, le cône et la sphère — Le **cylindre** de révolution a deux bases circulaires identiques et une surface latérale courbe ; il est engendré par la rotation d'un rectangle autour d'un de ses côtés. Le **cône** de révolution a une base circulaire et un sommet ; il est engendré par la rotation d'un triangle rectangle autour d'un côté de l'angle droit. La **sphère** est l'ensemble des points de l'espace situés à une même distance (le **rayon**) d'un point (le **centre**).

Tableau récapitulatif (polyèdres) :

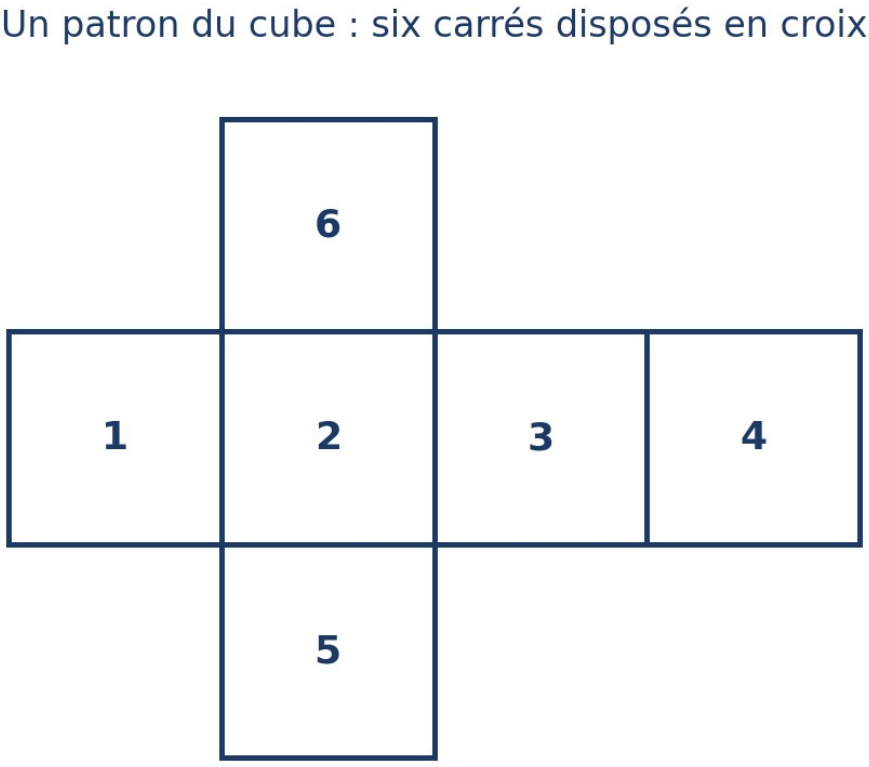
- **Cube :** 6 faces, 12 arêtes, 8 sommets.
- **Pavé droit :** 6 faces, 12 arêtes, 8 sommets.
- **Prisme à base triangulaire :** 5 faces, 9 arêtes, 6 sommets.
- **Pyramide à base carrée :** 5 faces, 8 arêtes, 5 sommets.
- **Pyramide à base triangulaire (tétraèdre) :** 4 faces, 6 arêtes, 4 sommets.

Erreur à éviter — Ne pas confondre le nombre de faces et le nombre d'arêtes : pour un prisme à base triangulaire, les deux bases triangulaires comptent comme des faces (5 faces au total, pas 3). Et la sphère n'est pas un polyèdre : elle n'a ni face plane, ni arête, ni sommet.

2. Les patrons des solides

2.1 Définition

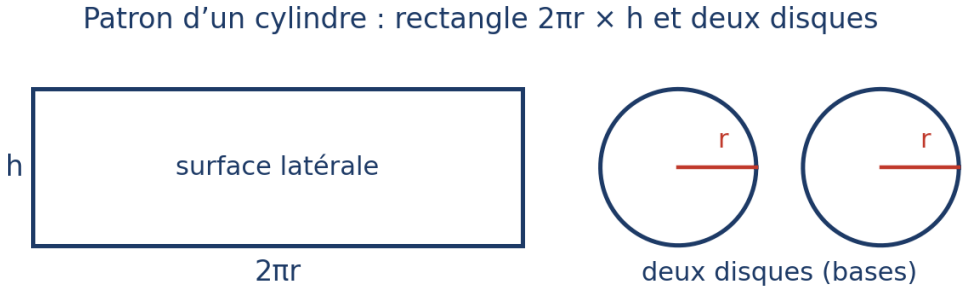
Définition — Le **patron** d'un solide est une figure plane qui, une fois découpée et pliée, permet de reconstituer le solide sans chevauchement ni trou. Un même solide peut avoir plusieurs patrons différents.



Un patron du cube : six carrés disposés en croix ; en pliant, on reconstitue le cube.

2.2 Patrons des solides usuels

- **Cube :** six carrés disposés en croix (un carré central entouré de quatre carrés, plus un sixième carré sur l'un d'eux). Il existe 11 patrons différents du cube.
- **Pavé droit :** six rectangles (trois paires de rectangles identiques).
- **Prisme à base triangulaire :** deux triangles identiques et trois rectangles.
- **Pyramide à base carrée :** un carré et quatre triangles identiques.
- **Cylindre :** deux disques identiques et un rectangle (dont un côté est la circonférence du disque : 2πr).
- **Cône :** un disque (la base) et un secteur circulaire.



Patron d'un cylindre : deux disques et un rectangle dont la longueur est la circonférence de la base (2πr).

Exemple résolu — On veut construire un cube d'arête 4 cm. Quelles sont les dimensions de son patron ?
Le patron est formé de six carrés de 4 cm de côté. En croix, il occupe par exemple 12 cm de long (3 carrés) sur 8 cm de large (2 carrés) si on dispose les carrés en « 3 + 2 + 1 », ou 16 cm

sur 8 cm dans la disposition en croix classique (4 carrés en ligne et un de chaque côté du deuxième).

Erreur à éviter — Un patron doit permettre de **replier sans chevauchement** : six carrés en ligne droite ne forment pas un patron de cube (deux faces se chevaucheraient et deux faces manqueraient). Il faut toujours vérifier mentalement le pliage, face par face.

3. Droites et plans dans l'espace

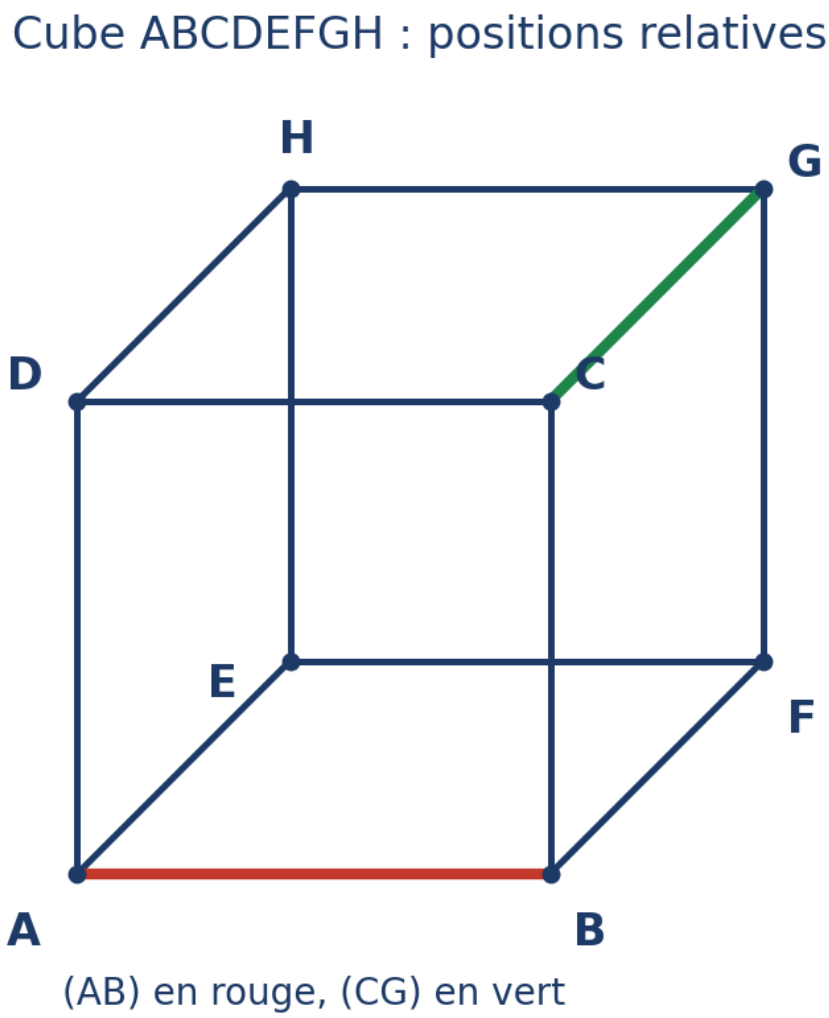
3.1 Définitions

Définitions — Dans l'espace, un **plan** est une surface plane illimitée, déterminée par trois points non alignés, ou par une droite et un point extérieur à cette droite, ou par deux droites sécantes. Une **droite** de l'espace est déterminée par deux points distincts.

Contrairement au plan, où deux droites sont parallèles ou sécantes, dans l'espace deux droites peuvent aussi être **non coplanaires** (on dit aussi **gauches**) : elles ne sont ni parallèles ni sécantes, car aucun plan ne les contient toutes les deux.

3.2 Droites et plans remarquables dans un cube

Dans un cube ABCDEFGH (ABCD la face inférieure, EFGH la face supérieure, A sous E, B sous F, C sous G, D sous H), on peut lire toutes les positions relatives : les arêtes, les diagonales des faces et les diagonales du cube donnent des exemples de droites parallèles, sécantes ou gauches ; les faces donnent des exemples de plans parallèles ou sécants.



Dans un cube : (AB) et (CD) sont parallèles, (AB) et (BC) sont sécantes, (AB) et (CG) sont gauches (non coplanaires).

> **Parallélisme et orthogonalité —** Deux droites sont **parallèles** si elles sont coplanaires et ne se coupent pas (ou si elles sont confondues). Une droite est **perpendiculaire** à un plan si elle est perpendiculaire à deux droites sécantes de ce plan. Deux plans sont **perpendiculaires** si l'un contient une droite perpendiculaire à l'autre.

4. Positions relatives dans l'espace

4.1 Deux droites

> **Positions relatives de deux droites —** Deux droites de l'espace sont : **parallèles** (coplanaires, sans point commun ou confondues), **sécantes** (coplanaires, avec un point commun) ou **gauches** (non coplanaires, sans point commun). Dans un cube, (AB) et (EF) sont parallèles, (AB) et (AD) sont sécantes en A, (AB) et (CG) sont gauches.

4.2 Une droite et un plan

> **Positions relatives d'une droite et d'un plan —** Une droite et un plan sont : **parallèles** (aucun point commun, ou droite incluse dans le plan), ou **sécants** (un seul point commun).

Si la droite est perpendiculaire au plan, elle le coupe en un point et elle est perpendiculaire à toutes les droites du plan passant par ce point.

Exemple résolu — Dans le cube ABCDEFGH, quelle est la position de la droite (AE) par rapport au plan (ABC) ?
(AE) coupe le plan (ABC) en A et elle est perpendiculaire à (AB) et à (AD), deux droites sécantes du plan (ABC) : la droite (AE) est donc **perpendiculaire** au plan (ABC).

4.3 Deux plans

Positions relatives de deux plans — Deux plans de l'espace sont : **parallèles** (aucun point commun, ou confondus) ou **sécants** (leur intersection est une droite). Deux plans parallèles à un même troisième plan sont parallèles entre eux.

Exemple résolu — Dans le cube ABCDEFGH, quelle est la position des plans (ABC) et (EFG) ?
Ce sont les plans des deux faces opposées du cube : ils n'ont aucun point commun, donc ils sont **parallèles**. Les plans (ABC) et (ABF) se coupent suivant la droite (AB) : ils sont **sécants**.

Erreur à éviter — Dans l'espace, « non parallèles » ne signifie pas « sécantes » : deux droites non parallèles peuvent être gauches (sans point commun). C'est la grande différence avec la géométrie plane, où deux droites non parallèles se coupent toujours.

5. Volumes et aires des solides

5.1 Volumes

Formules des volumes — Cube d'arête a : $V = a^3$. **Pavé droit** de dimensions L, l, h : $V = L \times l \times h$. **Prisme droit** : V = (aire de la base) × hauteur. **Pyramide** : V = (aire de la base × hauteur) ÷ 3. **Cylindre** de rayon r et de hauteur h : $V = \pi \times r^2 \times h$. **Cône** : $V = (\pi \times r^2 \times h) \div 3$. **Sphère** de rayon r : $V = (4/3) \times \pi \times r^3$.

Exemple résolu — Quel est le volume d'un prisme droit à base triangulaire d'aire 12 cm² et de hauteur 5 cm ?
$V = 12 \times 5 = 60$ cm³.

Exemple résolu — Quel est le volume d'une pyramide à base carrée de côté 6 cm et de hauteur 9 cm ?
Aire de la base : $6 \times 6 = 36$ cm². $V = (36 \times 9) \div 3 = 108$ cm³.

5.2 Aires latérales et aires totales

Formules des aires — Cube d'arête a : aire totale = $6a^2$. **Pavé droit** : aire totale = 2(Ll + Lh + lh). **Cylindre** : aire latérale = $2\pi rh$; aire totale = $2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r(r + h)$. **Sphère** : aire = $4\pi r^2$. **Cône** : aire latérale = $\pi \times r \times g$, où g est la génératrice ($g^2 = r^2 + h^2$).

Exemple résolu — Quelle est l'aire totale d'un cylindre de rayon 3 cm et de hauteur 7 cm ?
Aire latérale : $2 \times \pi \times 3 \times 7 = 42\pi$ cm². Aire des deux bases : $2 \times \pi \times 3^2 = 18\pi$ cm². Aire totale : 60π cm², soit environ 188,5 cm².

Erreur à éviter — Pour une pyramide ou un cône, le volume est **le tiers** de celui du prisme ou du cylindre de même base et de même hauteur : oublier la division par 3 est l'erreur la plus fréquente. Et pour le cylindre, l'aire latérale se calcule avec la circonférence $2\pi r$ (le patron latéral est un rectangle de côtés $2\pi r$ et h), pas avec l'aire du disque.

Exercices d'entraînement (type concours)

Les exercices suivants sont des **exercices d'entraînement proposés** : ils suivent le style et le niveau des questions de l'épreuve de spécialité, et leurs solutions sont détaillées étape par étape.

Exercice 1 — Faces, arêtes, sommets (proposé)

1) Combien une pyramide à base triangulaire (tétraèdre) a-t-elle de faces, d'arêtes et de sommets ?

2) Vérifier la relation d'Euler pour ce solide.

3) Un prisme à base pentagonale a 7 faces. Combien a-t-il d'arêtes et de sommets ?

Solution détaillée — Exercice 1

1) Une pyramide à base triangulaire a 4 faces (1 base + 3 faces latérales), 6 arêtes et 4 sommets.

2) $F + S - A = 4 + 4 - 6 = 2$: la relation d'Euler est vérifiée.

3) Un prisme à base pentagonale a 2 bases à 5 côtés : $5 \times 2 = 10$ sommets et $5 \times 3 = 15$ arêtes. Vérification : $7 + 10 - 15 = 2$.

Exercice 2 — Patron d'un cylindre (proposé)

On veut construire le patron d'un cylindre de rayon 4 cm et de hauteur 10 cm.

1) Quelles sont les dimensions du rectangle du patron ?

2) Quelle est l'aire totale du cylindre ? (On prendra $\pi \approx 3{,}14$.)

Solution détaillée — Exercice 2

1) Le rectangle a pour longueur la circonférence de la base : $2 \times \pi \times 4 = 8\pi \approx 25{,}12$ cm, et pour largeur la hauteur du cylindre : 10 cm.

2) Aire latérale : $2 \times \pi \times 4 \times 10 = 80\pi \approx 251{,}2$ cm^2. Aire des deux bases : $2 \times \pi \times 16 = 32\pi \approx 100{,}48$ cm^2. Aire totale $\approx 251{,}2 + 100{,}48 = 351{,}68$ cm^2.

Exercice 3 — Positions relatives dans un cube (proposé)

On considère le cube ABCDEFGH (ABCD face inférieure, EFGH face supérieure, A sous E, B sous F, C sous G, D sous H).

1) Quelle est la position relative des droites (AD) et (FG) ?

2) Quelle est la position relative de la droite (BH) et du plan (ABC) ?

3) Quelle est la position relative des plans (ABF) et (DCG) ?

Solution détaillée — Exercice 3

1) (AD) et (FG) : (AD) est une arête de la face inférieure, (FG) une arête de la face supérieure ; elles sont coplanaires (dans le plan (ADGF)) et parallèles : elles sont **parallèles**.

2) (BH) est une diagonale du cube : elle coupe le plan (ABC) au point B, donc elle est **sécante** au plan (ABC).

3) (ABF) et (DCG) sont les plans de deux faces latérales opposées du cube : ils sont **parallèles**.

Exercice 4 — Volume d'un cône (proposé)

Un cône de révolution a un rayon de 6 cm et une hauteur de 8 cm.

1) Calculer son volume. (On prendra $\pi \approx 3{,}14$.)

2) Calculer la longueur de sa génératrice g.

Solution détaillée — Exercice 4

1) $V = (\pi \times r^2 \times h) \div 3 = (3{,}14 \times 36 \times 8) \div 3 = 904{,}32 \div 3 = 301{,}44$ cm³.

2) $g^2 = r^2 + h^2 = 36 + 64 = 100$, donc $g = 10$ cm.

Exercice 5 — Volume d'une sphère (proposé)

Une sphère a un rayon de 3 cm.

1) Calculer son volume et son aire. (On prendra $\pi \approx 3{,}14$.)

2) Quel est le volume d'une boule de rayon 6 cm ?

Solution détaillée — Exercice 5

1) $V = (4/3) \times \pi \times r^3 = (4/3) \times 3{,}14 \times 27 = 113{,}04$ cm³. Aire $= 4 \times \pi \times r^2 = 4 \times 3{,}14 \times 9 = 113{,}04$ cm².

2) Le rayon double : le volume est multiplié par $2^3 = 8$, soit $113{,}04 \times 8 = 904{,}32$ cm³.

Exercice 6 — Patron et aire (proposé)

Le patron d'un cube a une aire totale de 150 cm².

1) Quelle est la longueur de l'arête du cube ?

2) Quel est le volume du cube ?

Solution détaillée — Exercice 6

1) Le patron est formé de 6 carrés identiques : l'aire d'un carré est $150 \div 6 = 25$ cm², donc l'arête mesure 5 cm.

2) $V = a^3 = 5^3 = 125$ cm³.

À retenir

À retenir — l'essentiel de la leçon

Polyèdres : cube 6 faces / 12 arêtes / 8 sommets ; prisme triangulaire 5 / 9 / 6 ; pyramide carrée 5 / 8 / 5 ; relation d'Euler $F + S - A = 2$.

Patrons : cube 6 carrés en croix ; cylindre 2 disques + rectangle ($2\pi r \times h$) ; cône disque + secteur circulaire.

Positions relatives : deux droites parallèles, sécantes ou gauches ; droite et plan parallèles ou sécants ; deux plans parallèles ou sécants.

Volumes : cube a^3 ; pavé L × l × h ; prisme base × h ; pyramide (base × h) ÷ 3 ; cylindre $\pi r^2 h$; cône $(\pi r^2 h) \div 3$; sphère $(4/3)\pi r^3$.

Aires : cube $6a^2$; cylindre $2\pi r(r + h)$; sphère $4\pi r^2$.

Prochaine leçon : **Mesure** (périmètres et aires des figures planes, volumes, conversions d'unités, durées et stockage numérique).

Source : Descriptif officiel du concours de recrutement des enseignants du primaire (spécialité, filière bilingue), sessions 2023, 2024 et 2025 — domaine « Géométrie dans l'espace ». Les exercices de cette leçon sont des exercices d'entraînement proposés par l'auteur ; ils seront remplacés par des questions d'épreuves antérieures dès leur collecte.