EDUTECH

RÉVISION — CONCOURS DE L'ENSEIGNEMENT (PRIMAIRE)

Dénombrement et suites

Dénombrement, arrangements, combinaisons et suites arithmétiques et géométriques • Mathématiques — Spécialité • Leçon 9

Domaine « Dénombrement et suites » : présent dans 4 des 5 dernières sessions • Le domaine couvre la leçon 9 • Source : descriptif officiel du concours

Objectifs de la leçon

- Maîtriser les **principes de dénombrement** (additif et multiplicatif) et le cardinal d'un ensemble fini.
- Calculer des **factorielles**, des **arrangements** et des **permutations**.
- Calculer des **combinaisons** et utiliser leurs propriétés.
- Étudier les **suites arithmétiques** (terme général, somme des termes).
- Étudier les **suites géométriques** (terme général, somme, comportement selon q).
- Résoudre des **problèmes concrets** de dénombrement et de suites.
- Distinguer les situations où l'**ordre compte** (arrangement) de celles où il ne compte pas (combinaison).

Plan de la leçon

1. Ensembles finis et principes de comptage

2. Arrangements et permutations

3. Combinaisons

4. Suites arithmétiques

5. Suites géométriques

6. Sommes et problèmes mixtes

7. Exercices d'entraînement (type concours) avec solutions détaillées

8. À retenir

1. Ensembles finis et principes de comptage

Définitions — Un **ensemble fini** est un ensemble qui possède un nombre fini d'éléments ; ce nombre est son **cardinal**. Dénombrer, c'est compter le nombre d'éléments d'un ensemble fini, ou le nombre de façons de réaliser une tâche.

Principes de comptage — Principe multiplicatif : si une tâche se décompose en étapes successives avec $n_1, n_2, \ldots, n_k$ choix possibles à chaque étape, le nombre total de façons est $\mathbf{n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_k}$. **Principe additif :** si l'on doit choisir **l'une ou l'autre** de deux options disjointes (n_1 choix pour la première, n_2 pour la seconde), le nombre total de façons est $\mathbf{n_1 + n_2}$.

Exemple résolu — Avec 3 chemises et 4 pantalons, on peut former $3 \times 4 = 12$ tenues différentes (principe multiplicatif).

Exemple résolu — Un code est formé de 2 lettres (26 choix chacune) suivies d'un chiffre (10 choix). Le nombre de codes possibles est $26 \times 26 \times 10 = 6\,760$.

Exemple résolu — Pour s'habiller, on choisit une chemise parmi 3 ou un pull parmi 2 (choix exclusifs) : il y a $3 + 2 = 5$ choix possibles (principe additif). Si ensuite on choisit un pantalon parmi 4, le nombre de tenues devient $5 \times 4 = 20$ (principe multiplicatif appliqué après le choix exclusif).

Erreur à éviter — Bien distinguer les étapes **successives** (on multiplie : « et puis ») des choix **exclusifs** (on additionne : « ou bien »). « 3 chemises et 4 pantalons » donne 12 tenues (multiplication) ; « une chemise ou un pull » parmi 3 chemises et 2 pulls donne $3 + 2 = 5$ choix (addition).

2. Arrangements et permutations

Définitions — La **factorielle** d'un entier $n \geq 1$ est $\mathbf{n! = 1 \times 2 \times \ldots \times n}$; par convention, $\mathbf{0! = 1}$. Un **arrangement** de k éléments parmi n ($k \leq n$) est un choix **ordonné** de k éléments distincts : son nombre est $\mathbf{A(n\,;\,k) = n \times (n-1) \times \ldots \times (n-k+1) = n!\,/\,(n-k)!}$. Une **permutation** de n éléments est un arrangement de n éléments parmi n : son nombre est $\mathbf{n!}$.

Exemple résolu — Nombre de façons de ranger 3 livres différents parmi 5 sur une étagère (l'ordre compte) : $A(5\,;\,3) = 5 \times 4 \times 3 = 60$.

Exemple résolu — Nombre de permutations de 4 lettres distinctes : $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$.

Exemple résolu — Dans une course de 12 chevaux, le nombre d'ordres d'arrivée possibles pour les 3 premiers (tiercé dans l'ordre) est $A(12\,;\,3) = 12 \times 11 \times 10 = 1\,320$.

Erreur à éviter — Un arrangement suppose que l'**ordre compte** et qu'il n'y a **pas de répétition**. Si l'ordre ne compte pas, ce n'est plus un arrangement mais une **combinaison** (section 3) : on divise alors par $k!$ pour « oublier » l'ordre.

3. Combinaisons

Définition — Une **combinaison** de k éléments parmi n (k ≤ n) est un choix **non ordonné** de k éléments distincts : son nombre est **C(n ; k) = n! / (k! × (n − k)!) = A(n ; k) / k!**. C'est aussi le nombre de **parties à k éléments** d'un ensemble à n éléments.

Propriétés — **C(n ; 0) = 1** ; **C(n ; 1) = n** ; **C(n ; n) = 1** ; **C(n ; k) = C(n ; n − k)** (choisir k éléments, c'est choisir les n − k éléments laissés de côté) ; **C(n ; k) + C(n ; k + 1) = C(n + 1 ; k + 1)** (relation de Pascal). Formule du binôme de Newton : **(a + b)^{n} = Σ C(n ; k) × a^{n−k} × b^{k}** (somme pour k de 0 à n).

Exemple résolu — Nombre de comités de 3 membres choisis parmi 10 personnes (l'ordre ne compte pas) : C(10 ; 3) = 10! / (3! × 7!) = (10 × 9 × 8) / (3 × 2 × 1) = 720 / 6 = 120.

Exemple résolu — C(8 ; 2) = (8 × 7) / 2 = 28 ; et C(8 ; 6) = C(8 ; 2) = 28 (propriété de symétrie). Au loto, le nombre de grilles de 6 numéros parmi 49 est C(49 ; 6) = 13 983 816.

Exemple résolu — Formule du binôme pour n = 2 : $(a + b)^2 = C(2 ; 0) \times a^2 + C(2 ; 1) \times a \times b + C(2 ; 2) \times b^2 = 1 \times a^2 + 2 \times a \times b + 1 \times b^2 = a^2 + 2ab + b^2$. On retrouve la première identité remarquable.

Le **triangle de Pascal** donne les C(n ; k) ligne par ligne : chaque nombre est la somme des deux nombres situés juste au-dessus de lui (relation de Pascal). Premières lignes : n = 0 : 1 ; n = 1 : 1 1 ; n = 2 : 1 2 1 ; n = 3 : 1 3 3 1 ; n = 4 : 1 4 6 4 1. On y lit par exemple C(4 ; 2) = 6.

Erreur à éviter — On ne peut pas choisir **plus d'éléments qu'il n'y en a** : C(n ; k) n'a de sens que pour k ≤ n. Et ne pas confondre C(n ; k) et A(n ; k) : la combinaison oublie l'ordre, donc C(n ; k) = A(n ; k) / k! est toujours **plus petit** que A(n ; k) (sauf si k = 0 ou 1).

4. Suites arithmétiques

Définitions — Une suite (u_n) est **arithmétique** de **raison** r si chaque terme s'obtient en ajoutant r au précédent : **u_{n+1} = u_n + r** pour tout n. Le **terme général** est **u_n = u_0 + n × r** (ou, plus généralement, u_n = u_p + (n − p) × r). La suite est croissante si r > 0, décroissante si r < 0, constante si r = 0.

Somme des termes — La somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique vaut : **S = (nombre de termes) × (premier terme + dernier terme) / 2**. En particulier, $u_0 + u_1 + \ldots + u_n = (n + 1) \times (u_0 + u_n) / 2$.

Exemple résolu — Soit (u_n) arithmétique de premier terme u_0 = 3 et de raison r = 2. Alors u_1 = 5, u_2 = 7 et u_5 = 3 + 5 × 2 = 13. La somme des 6 premiers termes (u_0 à u_5) est 6 × (3 + 13) / 2 = 6 × 8 = 48.

Exemple résolu — Sara épargne 100 DH le premier mois, puis 20 DH de plus chaque mois. C'est une suite arithmétique de raison 20 : u_n = 100 + 20n (n = 0 pour le premier mois). Au

bout de 12 mois (n = 12), elle épargne u_{12} = 100 + 240 = 340 DH ce mois-là, et le total épargné sur 13 mois (u_0 à u_{12}) est 13 × (100 + 340) / 2 = 13 × 220 = 2 860 DH.

4.3 Reconnaître une suite arithmétique

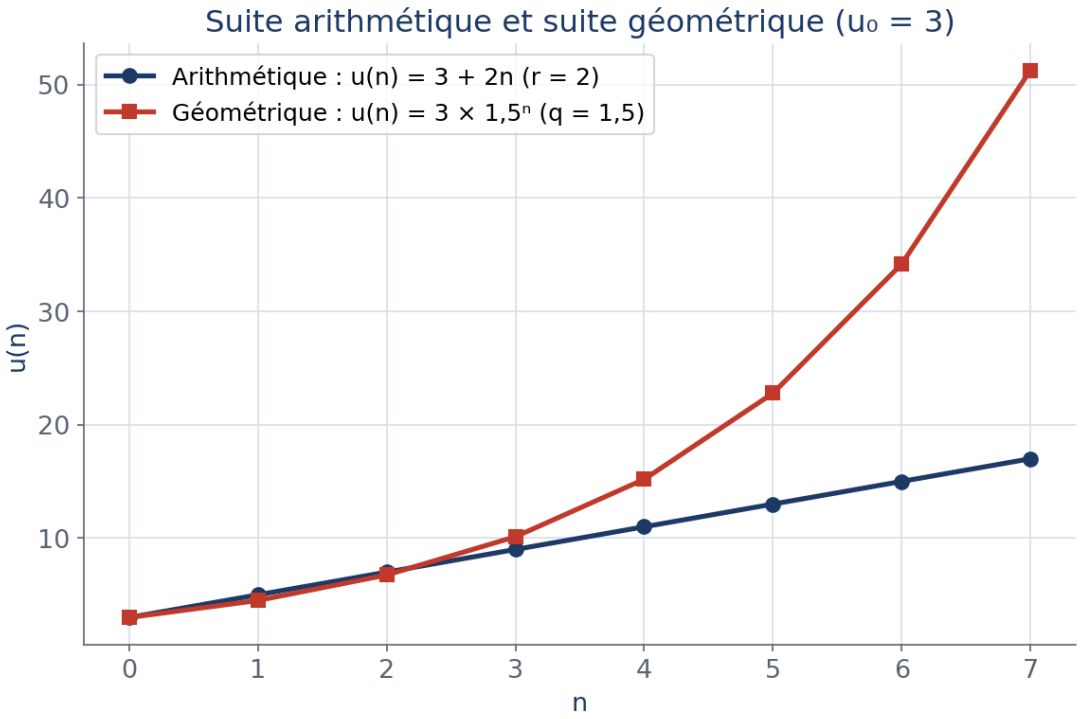
Pour vérifier qu'une suite est arithmétique, on calcule les **différences** entre termes consécutifs : elles doivent être toutes égales à la raison r. La suite 5 ; 9 ; 13 ; 17 est arithmétique de raison 4 (9 − 5 = 13 − 9 = 17 − 13 = 4). En revanche, la suite 2 ; 4 ; 8 ; 16 n'est pas arithmétique (4 − 2 = 2 mais 8 − 4 = 4) : c'est une suite géométrique de raison 2.

Erreur à éviter — Compter le **nombre de termes** : de u_p à u_q, il y a **q − p + 1** termes (et non q − p). Par exemple, de u_0 à u_5, il y a 6 termes. Oublier le « + 1 » fausse la somme.

5. Suites géométriques

Définitions — Une suite (u_n) est **géométrique** de **raison** q ($q \neq 0$) si chaque terme s'obtient en multipliant le précédent par q : **u_{n+1} = q × u_n** pour tout n. Le **terme général** est **u_n = u_0 × q^{n}** (ou $u_n = u_p \times q^{n-p}$).

Somme des termes et comportement — Si **q ≠ 1**, la somme des n premiers termes (u_0 à u_{n-1}) est **S = u_0 × (1 − q^{n}) / (1 − q)**. Si q = 1, la suite est constante et S = n × u_0. Comportement : si **|q| > 1**, $|u_n|$ tend vers +∞ ; si **|q| < 1**, u_n tend vers 0 ; si q = 1, la suite est constante ; si q = −1, elle alterne entre deux valeurs.



Exemple résolu — Soit (u_n) géométrique de premier terme u_0 = 3 et de raison q = 2. Alors u_1 = 6, u_2 = 12 et $u_4 = 3 \times 2^4 = 48$. La somme des 5 premiers termes (u_0 à u_4) est $3 \times (1 - 2^5) / (1 - 2) = 3 \times (1 - 32) / (-1) = 3 \times 31 = 93$.

Exemple résolu — Une population de 1 000 habitants augmente de 5 % par an : c'est une suite géométrique de raison q = 1,05. Après 10 ans, la population est $1\,000 \times 1{,}05^{10} \approx 1\,000 \times 1{,}6289 \approx 1\,629$ habitants.

5.3 Reconnaître une suite géométrique

Pour vérifier qu'une suite est géométrique (à termes non nuls), on calcule les **quotients** entre termes consécutifs : ils doivent être tous égaux à la raison q. La suite 3 ; 6 ; 12 ; 24 est géométrique de raison 2 (6 / 3 = 12 / 6 = 24 / 12 = 2). En revanche, la suite 2 ; 4 ; 6 ; 8 n'est pas géométrique (4 / 2 = 2 mais 6 / 4 = 1,5) : c'est une suite arithmétique de raison 2.

Erreur à éviter — Dans la formule de la somme, l'exposant est le **nombre de termes** : pour $u_0 + \dots + u_{n-1}$ (n termes), c'est q^n qui intervient. Et ne pas confondre raison **additive** (suite arithmétique : on ajoute r) et raison **multiplicative** (suite géométrique : on multiplie par q).

6. Sommes et problèmes mixtes

Sommes classiques — Somme des n premiers entiers : $\mathbf{1 + 2 + \dots + n = n \times (n + 1) / 2}$. Somme des n premiers entiers impairs : $\mathbf{1 + 3 + \dots + (2n - 1) = n^2}$. Ces formules sont des cas particuliers des sommes de suites arithmétiques (de raisons 1 et 2).

Exemple résolu — Calculer 1 + 2 + … + 100. C'est la somme des 100 premiers entiers : 100 × 101 / 2 = 5 050.

Exemple résolu — Dans une classe de 30 élèves, on choisit un délégué **et** un suppléant (l'ordre compte) : A(30 ; 2) = 30 × 29 = 870 façons. Puis on choisit un comité de 3 élèves (l'ordre ne compte pas) : C(30 ; 3) = (30 × 29 × 28) / 6 = 4 060 façons.

Exemple résolu — Une urne contient 5 boules rouges et 3 boules bleues. On tire 3 boules simultanément (sans ordre). Le nombre de tirages possibles est C(8 ; 3) = (8 × 7 × 6) / 6 = 56. Le nombre de tirages avec exactement 2 boules rouges est C(5 ; 2) × C(3 ; 1) = 10 × 3 = 30 (on choisit 2 rouges parmi 5 et 1 bleue parmi 3).

Erreur à éviter — Face à un problème de dénombrement, toujours se demander d'abord : **l'ordre compte-t-il ?** et **y a-t-il répétition possible ?** La réponse décide entre arrangement, combinaison et principe multiplicatif — c'est là que se joue l'exercice.

Exercices d'entraînement (type concours)

Les exercices suivants sont des **exercices d'entraînement proposés** : ils suivent le style et le niveau des questions de l'épreuve de spécialité, et leurs solutions sont détaillées étape par étape.

Exercice 1 — Arrangements et permutations (proposé)

1) Combien de façons y a-t-il de ranger 3 livres différents parmi 5 sur une étagère ?

2) Combien de mots de 3 lettres distinctes peut-on former avec 5 lettres différentes ?

3) Combien de podiums différents (3 premiers dans l'ordre) sont possibles parmi 8 coureurs ?

Solution détaillée — Exercice 1

1) L'ordre compte et il n'y a pas de répétition : $A(5 ; 3) = 5 \times 4 \times 3 = 60$ façons.

2) C'est le même dénombrement : choisir 3 lettres ordonnées parmi 5, soit $A(5 ; 3) = 60$ mots.

3) $A(8 ; 3) = 8 \times 7 \times 6 = 336$ podiums possibles.

Exercice 2 — Combinaisons (proposé)

1) Combien de comités de 3 membres peut-on former parmi 10 personnes ?

2) Dans un groupe de 6 filles et 4 garçons, combien de comités de 3 membres avec exactement 2 filles et 1 garçon ?

3) Calculer $C(7 ; 3)$.

Solution détaillée — Exercice 2

1) L'ordre ne compte pas : $C(10 ; 3) = (10 \times 9 \times 8) / 6 = 720 / 6 = 120$ comités.

2) On choisit 2 filles parmi 6 et 1 garçon parmi 4 : $C(6 ; 2) \times C(4 ; 1) = 15 \times 4 = 60$ comités. ($C(6 ; 2) = (6 \times 5) / 2 = 15$ et $C(4 ; 1) = 4$.)

3) $C(7 ; 3) = (7 \times 6 \times 5) / 6 = 210 / 6 = 35$.

Exercice 3 — Suite arithmétique : épargne (proposé)

Sara épargne 50 DH le premier mois, puis 10 DH de plus chaque mois.

1) Donner le terme général u_n de son épargne mensuelle ($n = 0$ pour le premier mois).

2) Combien épargne-t-elle le 12e mois ?

3) Quel est le total épargné après 12 mois ?

Solution détaillée — Exercice 3

1) C'est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 50$ et de raison $r = 10$: $u_n = 50 + 10n$.

2) Le 12e mois correspond à $n = 11$: $u_{11} = 50 + 110 = 160$ DH.

3) Total sur 12 mois (u_0 à u_{11}) : $12 \times (u_0 + u_{11}) / 2 = 12 \times (50 + 160) / 2 = 12 \times 105 = 1\,260$ DH.

Exercice 4 — Suite géométrique (proposé)

Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $q = 3$.

1) Calculer u_3.

2) Calculer la somme des 4 premiers termes (u_0 à u_3).

3) Déterminer le plus petit entier n tel que $u_n > 1\,000$.

Solution détaillée — Exercice 4

1) $u_3 = 5 \times 3^3 = 5 \times 27 = 135$.

2) $S = 5 \times (1 - 3^4) / (1 - 3) = 5 \times (1 - 81) / (-2) = 5 \times 40 = 200$.

3) $u_n = 5 \times 3^n > 1\,000$ donne $3^n > 200$. Or $3^4 = 81 < 200$ et $3^5 = 243 > 200$, donc $n = 5$. Vérification : $u_5 = 5 \times 243 = 1\,215 > 1\,000$.

Exercice 5 — Problème mixte (proposé)

Dans une classe de 12 élèves :

1) Combien de façons de choisir un président et un vice-président (postes distincts) ?

2) Combien de comités de 4 élèves peut-on former ?

3) Combien de comités de 4 élèves contiennent le président ?

Solution détaillée — Exercice 5

1) Les postes sont distincts : l'ordre compte. A(12 ; 2) = 12 × 11 = 132 façons.

2) L'ordre ne compte pas : C(12 ; 4) = (12 × 11 × 10 × 9) / 24 = 11 880 / 24 = 495 comités.

3) Le président est déjà choisi : il reste à choisir 3 élèves parmi les 11 autres. C(11 ; 3) = (11 × 10 × 9) / 6 = 990 / 6 = 165 comités.

Exercice 6 — Sommes (proposé)

1) Calculer 1 + 2 + … + 50.

2) Calculer la somme des 10 premiers termes de la suite géométrique de premier terme u_0 = 2 et de raison q = 1/2.

3) Calculer la somme des 8 premiers termes de la suite arithmétique de premier terme u_0 = 7 et de raison r = −2.

Solution détaillée — Exercice 6

1) 1 + 2 + … + 50 = 50 × 51 / 2 = 1 275.

2) S = 2 × (1 − (1/2)^{10}) / (1 − 1/2) = 2 × (1 − 1/1 024) / (1/2) = 4 × (1 023 / 1 024) = 1 023 / 256 ≈ 3,996.

3) Les 8 premiers termes sont 7 ; 5 ; 3 ; 1 ; −1 ; −3 ; −5 ; −7. Le dernier terme est u_7 = 7 + 7 × (−2) = −7. Somme : 8 × (7 + (−7)) / 2 = 0.

À retenir

À retenir — l'essentiel de la leçon

Principes : étapes successives → multiplication ; choix exclusifs → addition.

Arrangement : A(n ; k) = n! / (n − k)! (ordre compte) ; **permutation :** n! ; **combinaison :** C(n ; k) = n! / (k! × (n − k)!) (ordre ne compte pas).

Propriétés : C(n ; k) = C(n ; n − k) ; C(n ; k) + C(n ; k + 1) = C(n + 1 ; k + 1).

Suite arithmétique : $u_{n+1} = u_n + r$; $u_n = u_0 + n \times r$; somme = (nombre de termes) × (premier + dernier) / 2.

Suite géométrique : $u_{n+1} = q \times u_n$; $u_n = u_0 \times q^n$; somme ($q \neq 1$) = $u_0 \times (1 - q^n) / (1 - q)$ pour n termes.

Sommes classiques : 1 + 2 + … + n = n(n + 1) / 2 ; somme des n premiers impairs = n^2.

Réflexe : l'ordre compte-t-il ? Y a-t-il répétition ? — la réponse choisit la formule.

Prochaine leçon : **Arabe** — les leçons de langue arabe (compréhension, structure du mot, structure de la phrase, phénomènes orthographiques, styles).

Source : Descriptif officiel du concours de recrutement des enseignants du primaire (spécialité, filière bilingue), sessions 2023, 2024 et 2025 — domaine « Dénombrement et suites ». Les exercices de cette leçon sont des exercices d'entraînement proposés par l'auteur ; ils seront remplacés par des questions d'épreuves antérieures dès leur collecte.